CBS

Colegio Bautista Shalom

Matemática 1
Primero Básico
Tercer Bimestre

Contenidos

CONJUNTOS NUMÉRICOS

- ✓ NÚMEROS NATURALES.
- ✓ NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS.
- ✓ NÚMEROS ENTEROS.
- ✓ NÚMEROS RACIONALES.

RAZONES Y PROPORCIONES

- ✓ RAZÓN.
  - PROPIEDADES DE LAS RAZONES.
- ✓ PROPORCIÓN.
  - PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.
- ✓ DERIVACIÓN.
- ✓ PROPORCIONALIDAD DIRECTA ENTRE DOS MAGNITUDES.
- ✓ MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES.
- ✓ MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES.

PORCENTAJE

REPARTO PROPORCIONAL

- ✓ VARIACIÓN DIRECTA E INVERSA.
- ✓ TABLA DE VARIACIÓN PROPORCIONAL.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

- ✓ NÚMERO DE SOLUCIONES.
- ✓ FRACCIONES Y PARÉNTESIS.
- ✓ RESOLVIENDO PROBLEMAS.
- ✓ TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje debes realizar cada uno de los ejercicios. Copia y resuelve cada ejercicio en hojas bond (blancas) a lápiz y escribe las respuestas con lapicero negro. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) N = Conjunto de los Números Naturales. N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,.......}

El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios. Este conjunto se caracteriza porque:

- Tiene un número **infinito** de elementos
- Cada elemento tiene un **sucesor** y todos, **excepto el 1,** un **antecesor.**
- El sucesor de un número natural se obtiene sumando uno (+1); el antecesor se obtiene restando uno (-1).

2) N* = N_0 = Conjunto de los Números Cardinales. N_0 = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,.....}

Al Conjunto de los Números Naturales se le agregó el 0 (cero) y se forma el Conjunto de los Números Cardinales.

3) Z = Conjunto de los Números Enteros. Z = {..... –3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

El Conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Conjuntos Naturales y Cardinales (por ejemplo: 5 – 20 = ¿?). Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un **punto simétrico**, situado a la izquierda del cero. Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él).

Z = N* U Conjunto de los Números Enteros negativos.

Z = Tiene 3 Subconjuntos:

Enteros Negativos: Z^-
Enteros Positivos: Z^+
Enteros Positivos y el Cero: Z_0^+

Por lo tanto, el Conjunto de los Números Enteros es la unión de los tres subconjuntos mencionados.
$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$

4) Q = Conjunto de los Números Racionales. Q = {....- ¾, - ½, - ¼, 0, ¼, ½, ¾,.....}

El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los Números Naturales, Números Cardinales y Números Enteros. Por ejemplo, sólo se puede dividir en el conjunto de los Números Enteros **si y sólo si** el **dividendo es múltiplo, distinto de cero, del divisor.**

Se expresa por comprensión como: Q = {a /b tal que a y b $\in$ Z; y b $\neq$ 0}

5) I = Q* = Conjunto de Números Irracionales.

I = Conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos

Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las **raíces inexactas, el número Pi,** etc. A él pertenecen todos los **números decimales infinitos puros**, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción. No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos que **sí pueden transformarse en una fracción.**

Ejemplos:

a. 1,4142135....
b. 0,10200300004000005....

NÚMEROS NATURALES

El **conjunto de los números naturales** está formado por: **N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}**

Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (número cardinal). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (número ordinal).

Los **números naturales** están **ordenados**, lo que nos permite comparar dos **números naturales:**

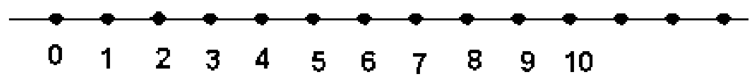
5 **>** 3; 5 es **mayor que** 3.
3 **<** 5; 3 es **menor que** 5.

Los **números naturales** son **ilimitados**, si a un número natural le sumamos 1, obtenemos otro **número natural**.

Representación de los números naturales:

Los números naturales se pueden representar en una recta ordenados de menor a mayor.

Sobre una recta señalamos un punto, que marcamos con el número cero. A la derecha del cero, y con las mismas separaciones, situamos de menor a mayor los siguientes números naturales: 1, 2, 3...



Operaciones con Números Naturales:

Suma de los Números Naturales: a + b = c

Los términos de la suma, **a** y **b**, se llaman **sumandos** y el resultado, **c**, **suma**.

Propiedades de la suma de números naturales:

Interna. El resultado de **sumar dos números naturales** es otro **número natural**.

$$a + b \in N$$

Asociativa. El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Por ejemplo: (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)
5 + 5 = 2 + 8
10 = 10

Conmutativa. El orden de los sumandos no varía la suma.

$$a + b = b + a$$

Por ejemplo: 2 + 5 = 5 + 2
7 = 7

Elemento neutro. El 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

$$a + 0 = a$$

Por ejemplo: 3 + 0 = 3

Resta de Números Naturales: a – b = c

Los términos que intervienen en una **resta** se llaman: **a**, **minuendo** y **b**, **sustraendo**. Al resultado, **c**, lo llamamos **diferencia**.

Propiedades de la resta de números naturales:

No es una operación interna. El resultado de **restar dos números naturales** no siempre es otro **número natural.** $2 - 5 \notin \mathbb{N}$

No es Conmutativa. El orden de sus factores pude afectar el resultado de la operación. Dado que el signo "**–**" pertenece a la operación y no a algún número de al expresión.

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

Multiplicación de Números Naturales:

Multiplicar dos números naturales consiste en **sumar uno** de los **factores consigo mismo** tantas veces como indica el otro **factor**.

$$\mathbf{a \cdot b = c}$$

Los términos **a** y **b** se llaman **factores** y el resultado, **c**, **producto.**

Propiedades de la multiplicación de números naturales:

Interna. El resultado de multiplicar dos números naturales es otro número natural**.**

$$\mathbf{a \cdot b} \in \mathbb{N}$$

Asociativa. El modo de agrupar los factores no varía el resultado.

$$\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

Por ejemplo: $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$
$6 \cdot 5 = 2 \cdot 15$
$30 = 30$

Conmutativa. El orden de los factores no varía el producto**.**

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

Por ejemplo: $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$
$10 = 10$

Elemento neutro. El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$\mathbf{a \cdot 1 = a}$$

Por ejemplo: $3 \cdot 1 = 3$

Distributiva. La multiplicación de un número natural por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número natural por cada uno de los sumandos.

$$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Por ejemplo: $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$
$2 \cdot 8 = 6 + 10$
$16 = 16$

Sacar factor común:

Es el proceso inverso a la ***propiedad distributiva***.

Si varios **sumandos** tienen un **factor común**, podemos transformar la **suma** en **producto** extrayendo dicho **factor.**

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Por ejemplo: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5)$
$6 + 10 = 2 \cdot 8$
$16 = 16$

División de Números Enteros:

$$D / d = c$$

Los términos que intervienen en una **división** se llaman, **D**, **dividendo** y, **d, divisor**. Al resultado, **c**, lo llamamos **cociente**.

Tipos de divisiones:

División exacta: Una **división** es **exacta** cuando el **resto** es **cero**.

$$D = d \cdot c$$

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \hline \boxed{0} & 3 \end{array}$$

15 = 5 · 3

División entera: Una **división** es **entera** cuando el **resto** es **distinto** de **cero**.

$$D = d \cdot c + r$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 3 \end{array}$$

17 = 5 · 3 + 2

Propiedades de la división de números naturales:

No es una operación interna: El resultado de **dividir dos números naturales** no siempre es otro **número natural**. $2 / 6 \notin \mathbb{N}$

No es Conmutativo:

$$a / b \neq b / a$$

Por ejemplo: $6 / 2 \neq 2 / 6$

Cero dividido entre cualquier número da cero.

Por ejemplo: $0 / 5 = 0$

No se puede dividir por 0:

Está denotado como error matemático.

Por ejemplo:

Al ingresar una división por cero en la calculadora. Marcará error.

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Un número primo es un número natural que solo tiene dos factores que son el número mismo y el uno. Un número compuesto tiene otros factores además de sí mismo y el uno.

Los números 0 y 1 no son ni primos ni compuestos.

Todos los números pares son divisibles por dos por lo tanto todos los números pares mayores que dos son números compuestos. Todos los números que terminan en cinco son divisibles por cinco. Por lo tanto todos los números que terminan en cinco y son más grandes que cinco son números compuestos.

PRACTICO Y APRENDO 01.

Para hallar los números primos entre 1 y 100, construiremos la criba de Eratóstenes. Por lo que al final de los pasos para encontrar los números primos se te presentara una tabla de números para que puedas paso a paso encontrar los números primos en el límite antes mencionado.

Sigue los pasos siguientes:

1. El primer número que aparece sin tachar es el 2, que es primo (rodéalo con una circunferencia en rojo). Tacha, a partir del 2, todos los números de 2 en 2; éstos (4, 6, 8, 10, 12,...) no son primos pues son todos divisibles por 2.

2. El siguiente número que aparece sin tachar es el 3, que es primo (rodéalo con una circunferencia en rojo).Tacha, a partir del 3, todos los números de 3 en 3, incluso los ya tachados anteriormente; éstos (3, 6, 9, 12, 15,...) no son primos pues son todos divisibles por 3.

3. El siguiente número que aparece sin tachar es el 5, que es primo (rodéalo con una circunferencia en rojo). Tacha, a partir del 5, todos los números de 5 en 5, incluso los ya tachados anteriormente; éstos (5, 10, 15, 20, 25,...) no son primos pues son todos divisibles por 5.

4. Continúa este proceso mientras te sea posible seguir tachando números. Por ejemplo el 77 es divisible dentro de 7 que su resultado es 11, y el 91 que es divisible también dentro de 7 que su resultado es 13… El siguiente número que aparece sin tachar es el...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

EJERCICIO 01. Lee, analiza y responde los siguientes problemas con cantidades de números naturales.

1. Un número es 20 unidades mayor que otro y si se dividen, se obtiene un cociente exacto de tres unidades. ¿Cuáles son esos números?

2. Busca tres números naturales consecutivos cuya suma sea 69.

3. ¿Qué tres números pares consecutivos suman 60?

4. Un parque de atracciones recibe una media de 860 personas al día en primavera, 1540 en verano, 620 en otoño y 156 en invierno. ¿Cuántos visitantes, tiene en un año?

5. Aurora, Joaquín e Irene han vendido papeletas para la excursión de fin de curso. Si preguntamos a Aurora y a Joaquín cuántas han vendido entre los dos, responderán que 25. Si preguntamos a Joaquín e Irene, dirán que 35, y si lo hacemos con Aurora e Irene, dirán que 30. ¿Cuántas papeletas ha vendido cada uno?

6. Un almacenista de fruta compra las manzanas a Q22.00 la caja y las vende a 2 Q/kg. Sabiendo que una caja contiene 15 kg, ¿cuántas cajas ha de vender para ganar Q 600.00?

7. En una familia el padre cobra Q1547.00 al mes, la madre Q1186.00 y la hija mayor Q 849.00 Si el abuelo cobra una pensión de Q659.00 ¿Cuáles son los ingresos mensuales de la familia?

8. Una finca rectangular tiene 90 m de largo y 42 m de ancho. Se desea cercar con una alambrada sostenida por postes colocados cada 6 metros. Si cada poste cuesta Q10.00, y cada metro de alambrada cuesta Q2.00 ¿cuánto costará la cerca?

9. Un restaurante pagó el mes pasado a su proveedor Q1144.00 por una factura de Q143 kg de carne. ¿Cuántos kilos ha gastado este mes sabiendo que la factura asciende a Q 1448.00?

10. Con la venta de 21 vacas se han comprado 8 caballos y han sobrado Q 7250.00 Si cada caballo se ha valorado en Q 800.00, ¿en cuánto se ha valorado cada vaca?

NÚMEROS ENTEROS

El **conjunto de los números enteros** es el conjunto que contiene a los números cardinales y los enteros negativos, representados por la letra mayúscula ***I***. Esto es,

$$\boldsymbol{I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

Reglas para efectuar operaciones con los números enteros:

Suma:

Positivo + Positivo: Se suman los valores absolutos y se mantiene el mismo signo.

Ejemplos: $8 + 7 = 15$; $5 + 11 = 16$

Negativo + Negativo: Se suman los valores absolutos y se mantiene el mismo signo.

Ejemplos: $-12 + -4 = -16$; $-9 + -6 = -15$

Positivo + Negativo o Negativo + Positivo: Se halla la diferencia de los valores absolutos de los números. El resultado es **positivo**, si el número positivo tiene el valor absoluto mayor. El resultado es **negativo**, si el número negativo tiene el valor absoluto mayor.

Ejemplos: $13 + -6 = 7$; $19 + -11 = 8$; $-14 + 6 = -8$; $-12 + 7 = -5$; $3 + (-3) = 0$

Resta:

Cuando se resta números enteros, se cambia el ejercicio de resta a la suma de su opuesto. El número que está siendo restado se llama **sustraendo**. El sustraendo es el número que está después del signo de resta. El signo de resta se reemplaza por el signo de suma y se busca el opuesto del sustraendo. Luego de transformar el ejercicio de resta a suma, se procede con las reglas de suma de números enteros. Esto es, si **a** y **b** son enteros, entonces, $\mathbf{a - b = a + (-b)}$.

Ejemplos:

$8 - 12 = 8 + (-12) = -4$
$8 - (-12) = 8 + 12 = 20$
$-2 - (-10) = -2 + 10 = 8$
$-2 - 10 = -2 + (-10) = -12$

Multiplicación de Números Enteros:

La **multiplicación** de varios **números enteros** es otro **número entero**, que tiene como **valor absoluto el producto de los valores absolutos** y, como **signo**, el que se obtiene de la aplicación de la **regla de los signos**.

Regla de los signos:

+	por	+	=	+
-	por	-	=	+
+	por	-	=	-
-	por	+	=	-

Por ejemplo:
$2 \cdot 5 = 10$
$(-2) \cdot (-5) = 10$
$2 \cdot (-5) = -10$
$(-2) \cdot 5 = -10$

Propiedades de la multiplicación de números enteros:

Interna: El resultado de **multiplicar dos números enteros** es otro **número entero**.

$$a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

Por ejemplo: $2 \cdot (-5) \in \mathbb{Z}$

Asociativa: El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son **números enteros** cualesquiera, se cumple que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Por ejemplo:
$(2 \cdot 3) \cdot (-5) = 2 \cdot [(3 \cdot (-5)]$
$6 \cdot (-5) = 2 \cdot (-15)$
$-30 = -30$

Conmutativa: El orden de los factores no varía el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Por ejemplo: $2 \cdot (-5) = (-5) \cdot 2$
$-10 = -10$

Elemento neutro: El **1** es el **elemento neutro** de la **multiplicación** porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

$$a \cdot 1 = a$$

Por ejemplo: $(-5) \cdot 1 = (-5)$

Distributiva: El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por ejemplo:
$(-2) \cdot (3 + 5) = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5$
$(-2) \cdot 8 = (-6) + (-10)$
$-16 = -16$

Sacar factor común: Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Por ejemplo:
$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = (-2) \cdot (3 + 5)$

División de Números Enteros:

La división de dos números enteros es igual al valor absoluto del cociente de los valores absolutos entre el dividendo y el divisor, y tiene de signo, el que se obtiene de la aplicación de la regla de los signos.

Regla de los signos:

+ entre + = +
- entre - = +
+ entre - = -
- entre + = -

Por ejemplo:
10 / 5 = 2
(-10) 7 (-5) = 2
10 / (-5) = -2
(-10) / 5 = -2

Propiedades de la división de números enteros:

No es una operación interna: El resultado de **dividir dos números enteros** no siempre es otro **número entero**.

$$(-2) / 6 \notin \mathbb{Z}$$

No es Conmutativo:

a / b ≠ b / a
6 / (−2) ≠ (−2) / 6

EJERCICIO 02. Efectuar las operaciones indicadas de números enteros:

1) 8 + 15	**2)** -19 + (-7)	**3)** -15 + 9	**4)** 12 + (-18)
5) 13 – 8	**6)** 9 – 14	**7)** -2 – 12	**8)** -6 – (-5)
9) 13 – (-6)	**10)** 5 + (-2) + (-8) + 4 =	**11)** 6 x 7	**12)** -8 x 5
13) (-9) (-8)	**14)** 3 x (-12)	**15)** (-3) (7) (-2)	**16)** (-2) (6) (7)
17) (-4) (-5) (-8)	**18)** 42 ÷ (-6)	**19)** (-54) ÷ (-3)	**20)** (-56) ÷ 8

NÚMEROS RACIONALES

Un **número racional** es todo **número** que puede representarse como el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero. Se representa por **Q**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z};\ b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0 \right\}$$

Operaciones con números racionales:

Suma y resta de números racionales.

Con el mismo denominador:

Se suman o se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

Con distinto denominador:

En primer lugar **se** reducen los denominadores a común denominador, y **se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15+2}{12}=\frac{17}{12}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{15-2}{12}=\frac{13}{12}$$

Propiedades de la suma de números racionales:

Interna: **a + b** $\in \mathbb{Q}$

Asociativa: (**a + b) + c = a + (b + c)**.

Por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) \qquad \frac{2+1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{2+3}{8}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{5}{8} \qquad \frac{6+3}{8}=\frac{4+5}{8} \qquad \frac{9}{8}=\frac{9}{8}$$

Conmutativa: a + b = b + a

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2+1}{4}=\frac{1+2}{4} \qquad \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Elemento neutro: a + 0 = a

$$\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}$$

Elemento opuesto: a + (−a) = 0

$$\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3-3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

$$-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

Multiplicación de números racionales:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

Propiedades de la multiplicación de números racionales:

Interna: a · b $\in \mathbb{Q}$

Asociativa: (a · b) · c = a · (b · c)

Por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)\qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{20}\qquad \frac{3}{40}=\frac{3}{40}$$

Conmutativa: a · b = b · a

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8}\qquad \frac{3}{40}=\frac{3}{40}$$

Elemento neutro: a ·1 = a

$$\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}$$

Elemento inverso: $a\cdot\frac{1}{a}=1$

Por ejemplo:

$$5\cdot\frac{1}{5}=1$$

Distributiva:

a · (b + c) = a · b + a · c

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\qquad \frac{7}{8}=\frac{7}{8}$$

Sacar factor común:

a · b + a · c = a · (b + c)

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$

División de números racionales:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

De forma breve, puede decirse que la operación de división de los números racionales, se asemeja a la operación de la multiplicación, pero esta, se opera de forma cruzada. En otras palabras formando una cruz entre los términos a y d, y los términos c y d. Colocando como numerador el resultado de a · d y como denominador el resultado de b · c.

Por ejemplo:

$$\frac{5}{7} : \frac{1}{6} = \frac{30}{7}.$$

EJERCICIO 03. Calcula las siguientes operaciones con números racionales y desarrolla cada una.

1. $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=$

2. $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=$

3. $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)=$

4. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=$

5. $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=$

6. $\frac{11}{9}-\frac{7}{9}=$

7. $\frac{2}{9}+\frac{7}{6}=$

8. $\frac{5}{4}-\frac{25}{12}+\frac{7}{10}=$

9. $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=$

10. $\frac{9}{2}+\frac{13}{2}-\left(\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\right)=$

11. $\frac{9}{7}-\frac{5}{7}+\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\right)+\frac{3}{7}=$

12. $\frac{21}{13}-\left(\frac{4}{13}-\frac{1}{13}\right)+\frac{11}{13}+\frac{2}{13}=$

13. $\frac{8}{3}-\left(\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\right)+\frac{12}{3}=$

14. $\frac{14}{11}-\left(\frac{3}{11}+\frac{1}{11}+\frac{2}{11}\right)+\frac{8}{11}=$

15. $\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN

La razón de dos números resulta de dividir ambos números. Razón o relación de dos cantidades es el resultado de comparar dos cantidades.

Por ejemplo la razón de 7 a 4 se escribe 7/4 o 7:4 y se lee siete es a cuatro. El primer término es el antecedente y el segundo consecuente.

Una razón es una comparación entre dos o más cantidades. Puede expresarse mediante una fracción.

Si las cantidades a comparar son a y b, la razón entre ellas se escribe como:

a : b, a / b ó $\frac{a}{b}$ y se lee "a es a b"

En una sala de clases hay 10 mujeres y 18 hombres. ¿Qué relación numérica existe entre el número de mujeres y el número de hombres? La relación entre el número de mujeres y el número de hombres es de "10 es a 18", otra forma de leerlo es "10 de 18"

El término a es el antecedente de la razón y el b, el consecuente.

El resultado de la división o cociente entre el antecedente y el consecuente se denomina valor de la razón.

$$\frac{a}{b} = \text{valor de la razón}$$

Dos o más razones son equivalentes cuando tienen igual valor.

PROPIEDADES DE LAS RAZONES

El valor de una razón no se altera cuando se suman o restan, se multiplican o dividen respectivamente sus términos, por un mismo número.

$$\left.\begin{array}{r} 9-5=4 \\ (9+1)-(5+1)=4 \\ 10-6=4 \end{array}\right\}\text{suma} \qquad \left.\begin{array}{r} 9-5=4 \\ (9-1)-(5-1)=4 \\ 8-4=4 \end{array}\right\}\text{resta}$$

En toda razón, si al antecedente se le suma o se le resta, se le multiplica o se le divide por una cantidad, la razón aumenta o disminuye, queda multiplicada o dividida respectivamente por esa cantidad.

$$\left.\begin{array}{c} 9-5=4 \\ (9+1)-(5)=4+1 \\ 10-5=5 \end{array}\right\}\text{suma} \qquad \left.\begin{array}{c} 9-5=4 \\ (9-1)-5=4-1 \\ 8-5=3 \end{array}\right\}\text{resta}$$

$$\left.\begin{array}{c} 9/5=1.8 \\ \left(9/5\right)(2)=(1.8)(2) \\ 18/5=3.6 \end{array}\right\}\text{multiplicación} \qquad \left.\begin{array}{c} 9/5=1.8 \\ 9/5\div 2=1.8\div 2 \\ \dfrac{9/2}{5}=9/10=0.9 \end{array}\right\}\text{división}$$

En toda razón, si al consecuente se le suma o se le resta, se le multiplica o se le divide por una cantidad, la razón aumenta o disminuye, queda multiplicada o dividida respectivamente por esa cantidad.

$$\left.\begin{array}{c} 9-5=4 \\ 9-(5+1)=4-1 \\ 9-6=3 \end{array}\right\}\text{suma} \qquad \left.\begin{array}{c} 9-5=4 \\ 9-(5-1)=4+1 \\ 9-4=5 \end{array}\right\}\text{resta}$$

$$\left.\begin{array}{c} 9/5=1.8 \\ \left(9/5\right)\left(1/2\right)=1.8/2 \\ 9/10=0.9 \end{array}\right\}\text{multiplicación} \qquad \left.\begin{array}{c} 9/5=1.8 \\ 9/5\div\left(1/2\right)=(1.8)(2) \\ \dfrac{9}{5/2}=18/5=3.6 \end{array}\right\}\text{división}$$

Ejemplo:

Hallar la relación entre las edades de dos niños de 10 y 14 $\frac{5}{7}$ años.

Hallar la razón geométrica entre 60 y 12 $\frac{60}{12}=5$

Hallar la razón geométrica entre 12 y 60 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

Es una igualdad entre dos razones

a, b y *c, d* es una proporción si la razón entre *a* y *b* es igual a la razón entre *c* y *d*.

se escribe:

a/b = c/d

ó *a:b :: c:d*

se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*

PROPORCIÓN

Consiste en la igualdad entre 2 razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow a:b::c:d$$

Se representa de dos maneras: a/b=c/d o a:b :: c:d

Y se lee *"a"* es a *"b"* como *"c"* es a *"d"*.

Los puntos a y d se llaman extremos y los puntos b y c se llaman medios.

$$\underbrace{15-\overbrace{3=17}^{medios}-5}_{extremos}$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

A) En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos. a×d=b×c

B) En toda proporción un MEDIO es igual al producto de los extremos dividido por el otro MEDIO. b= a×d/c

C) En toda proporción un EXTREMO es igual al producto de los medios dividido por el otro EXTREMO. a=b×c/d

$$\frac{4}{2}=\frac{10}{5} \qquad \frac{9}{15}=\frac{15}{25} \qquad \frac{2}{3}=\frac{4}{6}$$

$$(4)(5)=(2)(10) \qquad (9)(25)=(15)(15) \qquad (2)(6)=(3)(4)$$

$$20=20 \qquad 225=225 \qquad 12=12$$

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c}$$

De aquí se desprende que un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo, y que un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio:

$$a=\frac{bxc}{d} \qquad d=\frac{bxc}{a} \qquad b=\frac{axd}{c} \qquad c=\frac{axd}{b}$$

DERIVACIÓN

La Derivación de toda proporción, o de su expresión equivalente a x d = b x c, pueden derivarse otras tres proporciones diferentes.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \qquad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \qquad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces:

a) Alternar Extremos: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

b) Alternar Medios: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

c) Permutar: $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$

d) Invertir: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

e) Componer respecto al Antecedente y Consecuente respectivamente:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

f) Descomponer respecto al Antecedente y Consecuente respectivamente:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$$

g) Componer y descomponer a la vez: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{m \times a}{n \times b}=\frac{m \times c}{n \times d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, entonces $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ y $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>b, entonces $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ y $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>b, entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$ y $\frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>c, entonces $\frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}$ y $\frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>c, entonces $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$

EJERCICIO 04: considera los siguientes valores: **a = 20, b = 12, c = 5, d = 3, e = 15, f = 9, m = 4, n = 7**. En hojas aparte, y con la ayuda de tu catedrático/a, debes realizar la comprobación de las propiedades anteriores. La ponderación quedará a su criterio.

EJERCICIO 05: encuentra el término desconocido en las siguientes proporciones, en el subrayado desarrolla tu procedimiento y escribe con lapicero negro tu respuesta. Al finalizar, preséntale a tu catedrático(a) para su respectiva revisión, corrección (en caso sea necesario) y ponderación.

1. $\frac{4}{10} = \frac{x}{60}$ = ____________________________________ = ________

2. $\frac{9}{12} = \frac{12}{x}$ = ____________________________________ = ________

3. $\frac{8}{32} = \frac{2}{x}$ = ____________________________________ = ________

4. $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$ = ____________________________________ = ________

5. $\frac{x}{6} = \frac{24}{x}$ = ____________________________________ = ________

PROPORCIONALIDAD DIRECTA ENTRE DOS MAGNITUDES

Comprendido el concepto de proporción como una relación entre números o magnitudes, ahora veremos que esa relación puede darse en dos sentidos: Las dos magnitudes pueden subir o bajar (aumentar o disminuir) o bien si una de las magnitudes sube la otra bajo y viceversa.

Si ocurre, como en el primer caso, que las dos magnitudes que se comparan o relacionan pueden subir o bajar en igual cantidad, hablaremos de magnitudes directamente proporcionales.

La definición que usaremos es: Si dos magnitudes son tales que a doble, triple... cantidad de la primera corresponde doble, triple... cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son directamente proporcionales.

- ✓ Mientras más pan compro, más dinero pago por él.
- ✓ Mientras menos estudio, menos aprendo.

Ejemplo: un saco de papas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesan 2 sacos? Y un cargamento de papas pesa 520 kg ¿Cuántos sacos de 20 kg se podrán hacer?

Número de sacos	1	2	3	...	26	...
Peso en kg	20	40	60	...	520	...

Para pasar de la 1ª fila a la 2ª basta multiplicar por 20.

Para pasar de la 2ª fila a la 1ª dividimos por 20.

Observa que: $\frac{1}{20} = \frac{2}{40} = \frac{3}{60} = \ldots.$

Las magnitudes número de sacos y peso en kg son directamente proporcionales. La constante de proporcionalidad para pasar de número de sacos a kg es 20. Esta manera de funcionar de las proporciones nos permite adentrarnos en lo que llamaremos Regla de tres y que nos servirá para resolver una gran cantidad de problemas matemáticos.

Ejemplo: un vehículo tiene en carretera un rendimiento de 16 km/litro. ¿Cuántos litros de gasolina consumirá en un viaje de 192 km? Como estas variables se relacionan en forma directa (ya que más kilometraje implica que se gastará más gasolina), entonces su cociente es constante.

$$\frac{16\ km}{192\ km} = \frac{1\ litro}{x} \Rightarrow 16 * x = 192 * 1 \Rightarrow x = \frac{192}{16} = 12$$

Respuesta: en un viaje de 192 kilómetros el vehículo consumirá 12 litros de bencina.

Ejemplo: un cartón de 30 huevos cuesta $2.500. ¿Cuánto costará una docena?

$$\frac{30}{12} = \frac{2.500}{x} \Rightarrow x = \frac{12 * 2.500}{30} = 1.000$$

Respuesta: Una docena de huevos cuesta $1.000.

PRACTICO Y APRENDO 02.

Juan entrena ciclismo. La siguiente tabla registra el número de vueltas y el tiempo empleado por vuelta. Completa la tabla:

N Vueltas	4	8		20	23		30
Tiempo	12		35			50	

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Si dos magnitudes son tales que, a doble, triple... cantidad de la primera corresponde la mitad, la tercera parte... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son inversamente proporcionales.

Si una magnitud crece mientras la otra decrece decimos que son dos magnitudes inversamente proporcionales.

El producto constante se llama constante de proporcionalidad inversa. Cuando el producto de cada par de valores de magnitudes que se relacionan es constante, son inversamente proporcionales.

- ✓ Mientras más rápido viajo, menos tiempo me demoro.
- ✓ Mientras menos contamino el aire, más limpio estará.

Ejemplo:

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte,... Por tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales (también se dice que son indirectamente proporcionales).

Formamos la tabla:

Hombres	3	6	9	...	18
Días	24	12	8	...	?

Vemos que los productos 3 por 24 = 6 por 12 = 9 por 8 = 72

Por tanto 18 por x = 72. O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo. Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es 72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

Importante: Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes inversamente proporcionales se obtiene multiplicando las magnitudes entre sí, y el resultado se mantendrá constante.

Ejemplos:

Tres obreros demoran 5 días en hacer una zanja. ¿Cuánto demorarán 4 obreros? Por estar en proporcionalidad inversa (ya que más obreros tardaran menos tiempo en hacer la zanja) el producto entre las variables: número de obreros – tiempo, es constante (por esto debo tener que 3 * 5 es constante y para eso se invierten las variables completas):

Nº obreros	días
3	5
4	x

Si hay **mayor** cantidad de obreros se morarán **menos** días en hacer el trabajo.
Al ser proporción inversa invertimos el segundo término (el que no tiene incógnita).

$$\frac{3\text{ obreros}}{4\text{ obreros}} = \frac{5\text{ días}}{x\text{ días}} \Rightarrow \text{P. I} \Rightarrow \frac{4\text{ obreros}}{3\text{ obreros}} = \frac{5\text{ días}}{x\text{ días}} \Rightarrow x = \frac{5*3}{4} = 3{,}75$$

Respuesta: Se demoran aproximadamente 4 días en terminar la obra los 4 obreros (o demoran 3 días y 18 horas).

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Cuando dos magnitudes están relacionadas de manera que cuando una aumenta de valor (por ejemplo se duplica), la otra también lo hace (también se duplica), se dicen que son **directamente proporcionales.** Si en un problema nos dan dos magnitudes de las cuales conocemos los valores de dos de las cantidades de una y sólo una de la otra, la que falta se calcula mediante una proporción.

Ejemplo:

¿Cuántas lbs de papas podremos comprar con Q 72.30 si con Q 225.70 hemos comprado 110 lbs?

Libras	Quetzales
110 lbs	225.70
x	72.30

$$\frac{110}{x} = \frac{225.70}{72.30}$$

Teniendo en cuenta que producto de medios es igual al producto de extremos.

$$x = \frac{110 \cdot 72.30}{225.70} = 35.24$$

PORCENTAJE

Son un caso particular de proporcionalidad simple y directa donde uno de los cuatro términos es el 100. Los problemas más típicos son:

- ✓ Cálculo del tanto por ciento de una cantidad.
- ✓ Cálculo del tanto por ciento que representa una cantidad respecto a otra.
- ✓ Aumentos porcentuales.
- ✓ Disminuciones porcentuales.

Ejemplos:

1. Un negocio que vendía mensualmente 2900 artículos, incrementó sus ventas en un 12%. ¿A cuánto ascendieron las ventas?

Calculamos primero el 12% de 2900:

2900	100%
x	12%

De donde:

$$\frac{2900}{x} = \frac{100}{12} \longrightarrow x = \frac{12 \cdot 2900}{100} = 348\ artículos$$

Luego, las ventas se han aumentado en 348 y se venden por tanto 3248 artículos.

EJERCICIO 06: analiza, desarrolla en hojas aparte y resuelve los siguientes problemas de razón, proporción y porcentaje, y escribe con lapicero negro tu respuesta. Al finalizar, presenta a tu catedrático(a) para su respectiva revisión, corrección (en caso sea necesario) y ponderación.

1. Un lápiz de 25 centímetros proyecta una sombra de 4 centímetros. ¿Cuánto mide un árbol que proyecta una sombra de 1.20 metros?
2. Dos números están a razón. Si el menor de ellos es 189 ¿Cuál es el otro?

3. Una inversión de Q 500.00 produjo un rendimiento de Q200.00 en un año, otra inversión produjo Q 300.00 a la misma tasa de interés durante el mismo tiempo. ¿Cuál era el valor de la segunda inversión?

4. Dos obreros trabajan en una fábrica empacando calcetines, pero mientras uno empaca 3 cajas, el otro empaca 7 cajas. Si el más hábil ha empacado 91 cajas, ¿cuántas habrá empacado el otro?

5. La suma de dos números es 2920 y se encuentra en razón. ¿Cuáles son los números?

6. Una inversión de Q 3500.00 produce un rendimiento de Q 420.00 en un año, ¿qué rendimiento producirá una inversión de Q 4500.00 a la misma tasa de interés durante el mismo tiempo?

7. Comiendo 90 gramos de cereal, se producen 360 calorías. ¿Qué cantidad de cereal debe comerse para producir solamente 80 calorías?

8. Una mapa señala en el borde inferior: escala 1:100,000,000 ¿A cuántos kilómetros equivale una línea de 3 centímetros de largo?

9. En 1970 en México el número de kilómetros cuadrados de superficie estaban en razón con el número de habitantes. Si la superficie de México es de 1, 972,547 kilómetros cuadrados. ¿Cuántos habitantes había en México en 1970?

10. ¿Qué longitud tiene en un mapa una distancia de 400 kilómetros si el mapa señala: escala 1:19, 500, 000?

REPARTO PROPORCIONAL

Cuando hay que repartir una cantidad entre varias personas con arreglo a alguna magnitud de cada una de ellas de forma que cuanto mayor sea el valor de ésta, más cantidad le toca. Se resuelven adjudicando el total a la suma de todas las magnitudes y luego calculando lo que corresponde a una unidad (al uno). Si luego multiplicamos cada cantidad por el valor corresponde a la unidad sabremos lo que toca a cada uno

Ejemplo: repartir Q 300.00 entre 3 niños directamente proporcional a sus edades que son 2, 4 y 9.

Primero sumamos todas las edades: 2 + 4 + 9=15 años. Las reglas de tres serían las siguientes:

Q 300 15 años

Q x 2 años

$$\frac{300}{x} = \frac{15}{2} \longrightarrow x = \frac{2 \cdot 300}{15} = 40 \quad al\ pequeño$$

Q 300 15 años

Q x 4años

$$\frac{300}{x} = \frac{15}{4} \longrightarrow x = \frac{4 \cdot 300}{15} = 80 \quad al\ mediano$$

Q 300 15 años

Q x 9 años

$$\frac{300}{x} = \frac{15}{9} \longrightarrow x = \frac{9 \cdot 300}{15} = 180 \quad al\ mayor$$

¡APRENDIENDO A DIFERENCIAR!

VARIACIÓN DIRECTA E INVERSA

Cuando dos variables x, y están relacionadas de tal manera que la razón $\frac{y}{x}$ es igual a una constante (la razón no cambia), decimos que y varía directamente con x. El significado anterior se expresa en símbolos matemáticos de la siguiente manera:

"y varia directamente con x", significa que $\frac{y}{x}$ = constante=k donde: k se llama constante de proporcionalidad (k).

Puesto que $\frac{y}{x}$ =k, es equivalente a y=k · x, las dos ecuaciones:

$\frac{y}{x}$ =k ó y=k · x, representan una variación directa.

Una cantidad varía inversamente a otra cantidad si el producto de las dos cantidades es una constante. Por ejemplo, si **x** e **y** son variables y **k** es una constante, el hecho de que **x** varíe inversamente a **y** se expresa como:

xy = k o, **x = k/y**

Si **x** e **y** se sustituyen por valores vemos que uno aumenta cuando el otro disminuye y viceversa. Por otro lado, sus productos serán iguales a la misma constante en todo momento.

Si una cantidad varía inversamente a otra cantidad es INVERSAMENTE PROPORCIONAL a la segunda cantidad. En **xy = k**, el coeficiente de **k** es 1. La igualdad **xy = k** puede escribirse en la forma:

$$\frac{x}{k} = \frac{1}{y} \qquad \frac{k}{x} = \frac{y}{1}$$

Advierta que cuando una de las variables, **x** o **y**, aparece en el numerador de una razón, la otra variable aparece en el denominador de la segunda razón. Esto implica que **x** e **y** son inversamente proporcionales.

La variación inversa puede ilustrarse por medio de la fórmula para el área de un rectángulo. Si **A** es el área, **L** la longitud y **H** el ancho, la expresión del área de un rectángulo en términos de la longitud y ancho es:

A = LH

Supongamos que se comparan varios rectángulos, todos de la misma área pero de longitudes y anchos variables. Entonces **LH = A** tiene la misma forma que **xy = k**, donde **A** y **k** son las constantes. Así, **L** es inversamente proporcional a **H**, y **H** es inversamente proporcional a **L**,

Si el área constante es 12 cm^2 esta relación se transforma

LH = 12

Si la longitud es 4 cm, el ancho se determina como sigue:

$$H = \frac{12}{L} = \frac{12}{4} = 3 \text{ cm}$$

Si la longitud aumenta a 6 cm, el ancho disminuye como sigue:

$$H = \frac{12}{6} = 2 \text{ cm}$$

Si el área constante es 12, el ancho de un rectángulo disminuye de 3 a 2 cuando la longitud aumenta de 4 a 6. Cuando varían dos cantidades inversamente proporcionales, una disminuye al aumentar la otra.

EJERCICIO 07: analiza, desarrolla y resuelve los siguientes de reparto proporcional, y escribe con lapicero negro tu respuesta. Al finalizar, presenta a tu catedrático(a) para su respectiva revisión, corrección (en caso sea necesario) y ponderación.

1. Dos albañiles por trabajo realizado conjuntamete, cobran Q 340.00. Si el primero trabajó tres jornadas y media y el segundo cinco jornadas ¿Cuánto cobrará cada uno? (el cobro debe de determinarlo por el total de jornadas trabajadas).

2. Tres hermanos se reparten una herencia de Q 2820.00 de forma que por cada Q 5.00 que recibe el mayor, el mediano recibirá Q 4.00 y el pequeño Q 3.00 ¿Qué cantidad se recibirá cada uno? (la suma de lo que recibe cada uno se determina así 5x, 4x y 3x y la sumatoria es 12x es se igualará a la cantidad de dinero, luego se realiza el despeje de "x" que representa a la cantidad por la cual será multiplicado lo que recibe en Q cada uno).

3. Se han abonado Q 6, 888.00 por la limpieza de un bosque realizado por dos grupos de trabajadores de limpieza de la Municipalidad de Guatemala. El primer grupo está integrado por 12 trabajadores y ha trabajado durante 8 días. El segundo grupo tiene 15 hombres y ha trabajado 10 días ¿Cuánto le corresponde en Q a cada grupo de trabajo? (se multiplica el número de integrantes de los grupos de trabajo por los días trabajados y se realiza la sumatoria para encontrar los días trabajados en total por los dos grupos, luego se realiza una operación multiplicando la cantidad donada por los días trabajados por grupo y luego se divide entre el total de días que ambos grupos trabajaron).

4. Tres socios han obtenido en su negocio un beneficio de Q 12,900.00 ¿Qué parte corresponde a cada uno si el primero aportó inicialmente Q 18,000.00, el segundo Q 15,000.00 y el tercero Q 10,000.00? (se divide el beneficio a recibir entre el total aportado entre los tres socios y esto será la cantidad a recibir por cada Q invertido, esta cantidad debe de ser multiplicada por los aportes de forma individual y esto será lo que recibirá cada socio).

TABLA DE VARIACIÓN PROPORCIONAL

Las ***tablas de variación proporcional*** se usan para conocer si dos cantidades se relacionan entre sí, de manera que cuando aumenta o disminuye una cantidad, la otra de igual forma presenta algún cambio.

Las personas que tiene algún comercio las utilizan frecuentemente para saber si sus ventas pertenecen con el monto de dinero que han recaudado.

Se sugiere presentar a los alumnos tablas como las que se muestran junto con otras que se puedan resolver aplicando dobles, triples, mitades,... Es conveniente que estas tablas sean situaciones de compra-venta.

1 libra de tomate	2 libras	3 libras	4 libras
8 quetzales	Q 16	Q 24	Q 32

4 libras de manzana	3 libras	2 libras	1 libras
20 quetzales	Q15	Q 10	Q 5

EJERCICIO 08: realiza la tabla de variación proporcional de los siguientes enunciados, determina si es disminución o incremento proporcional, escribe con lapicero negro tu respuesta. Al finalizar, presenta a tu catedrático(a) para su respectiva revisión, corrección (en caso sea necesario) y ponderación.

1. Un depósito de agua se llena en 2.25 horas empleando cinco llaves de agua de igual diámetro. ¿En cuánto tiempo se llenará, si primero se utiliza una llave y luego tres?

2. "Un paquete oferta con dos galones de yogurt vale Q 250. Construir una tabla de valores para responder las siguientes preguntas:
   ¿Cuánto valen 4 galones de yogurt?
   ¿Cuánto valen 12 galones de yogurt?
   ¿Cuánto valen 48 galones de yogurt?

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación es una igualdad donde por lo menos hay un número desconocido, llamado incógnita o variable, y que se cumple para determinado valor numérico de dicha incógnita.

Se denominan **ecuaciones lineales** o de **primer grado** a las igualdades algebraicas con incógnitas cuyo exponente es 1 (elevadas a uno, que no se escribe).

En las ecuaciones tendremos sumas, restas, productos y cocientes de monomios sin parte literal (es decir, números) y de monomios con la parte literal

$$x \text{ (como } 2x \text{ ó } \frac{3x}{2}\text{).}$$

Resolver una ecuación consiste en encontrar el valor que debe tomar la incógnita x para que se cumpla la igualdad. Podemos comprobar si la solución encontrada es correcta sustituyendo la incógnita x por la solución. Como regla general, una ecuación de primer grado tiene una única solución. No obstante, puede darse el caso de que **no exista ninguna o que existan infinitas** (veremos algún ejemplo de estos casos). Como procedimiento general para resolver ecuaciones enteras de primer grado se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se reducen los términos semejantes, cuando es posible.
2. Se hace la transposición de términos (aplicando inverso aditivo o multiplicativo), los que contengan la incógnita se ubican en el miembro izquierdo, y los que carezcan de ella en el derecho.
3. Se reducen términos semejantes, hasta donde es posible.
4. Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita (inverso multiplicativo), y se simplifica.

NÚMERO DE SOLUCIONES

Si obtenemos una **igualdad imposible**, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

Si obtenemos la ecuación $1 = 0$, la ecuación inicial no tiene solución.

Si obtenemos una **igualdad que siempre se cumple**, cualquier valor es solución de la ecuación, es decir, la solución es todos los reales.

Ejemplo:

Si obtenemos la igualdad $0 = 0$, la solución es todos los reales: $x \in \mathbb{R}$

FRACCIONES Y PARÉNTESIS

Cuando hay **denominadores** y queremos evitarlos, multiplicamos toda la ecuación por el **mínimo común múltiplo** de éstos.

De este modo, al simplificar, los denominadores desaparecen.
Para **quitar los paréntesis**, multiplicamos el coeficiente de delante del paréntesis por todos los elementos que contiene.

El coeficiente puede ser el signo menos (es decir, -1, entonces el contenido cambia de signo), el signo más (es decir, +1, el contenido no cambia) o un número positivo, negativo o una fracción (este número pasa a multiplicar todo el contenido del paréntesis, cambiando los signos en el caso de ser negativo).

Cuando tenemos **paréntesis anidados**, es decir, un paréntesis dentro de otro, los vamos quitando desde fuera hacia dentro. Es decir, primero quitamos el paréntesis exterior (multiplicando su contenido por su coeficiente) y después, quitamos los siguientes procediendo del mismo modo: desde el más exterior a los más interiores. En realidad, no es necesario seguir un orden a la hora de quitar los paréntesis, pero es recomendable seguirlo mientras estamos aprendiendo.

TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

Principio básico de la transposición de términos: Manteniendo la Igualdad

El principio básico de la transposición de términos es mantener la igualdad y ¿a qué me refiero con mantener la igualdad?

Se puede realizar cualquier operación en ambos miembros de la igualdad y ésta no se vería afectada. Vamos a verlo (escanea el código QR)…

Como ves, siempre que se realice la misma operación en ambos miembros, se mantendrá la igualdad. No podemos operar en un miembro sí y en otro no. Es muy importante que este concepto lo entiendas perfectamente, ya que en esto se basa la **transposición de términos**.

Y tú te preguntarás ¿y para qué sirve todo esto? Pues nos vamos a aprovechar de esta propiedad para **despejar la x**, eliminando los términos que nos convenga en cada caso.

Transposición de Términos que están Sumando o Restando

Vamos a empezar viendo cómo cambiar de miembro los términos que están sumando o restando en la ecuación. Es muy fácil (escanea el código QR) veamos…

No hay que hacer siempre todos los pasos. A partir de ahora quédate cómo funciona esta regla y aplícala de un solo paso.

Los términos que están **sumando o restando en una expresión**, pasan al otro miembro con el **signo contrario.**

Transposición de Términos que están Multiplicando y Dividiendo

Seguimos con los números que están multiplicando o dividiendo. Igual de fácil que antes (escanea el código QR) veamos…

Igual que antes, no es necesario hacer todos los pasos. Ya puedes aplicar la regla de un solo paso cuando resuelvas tus ecuaciones.

Los valores que están **multiplicando** en un miembro, en la práctica, pasarán **dividiendo** al otro miembro **y viceversa.**

Aunque es necesario saber cómo funcionan las igualdades, en la **práctica se aplican estas reglas**, que son consecuencia de toda la explicación anterior:

- Cuando un término está **SUMANDO** en un miembro, pasa al otro miembro **RESTANDO**.
- Cuando un término está **RESTANDO** en un miembro, pasa al otro miembro **SUMANDO**.
- Cuando un término está **MULTIPLICANDO** en un miembro, pasa al otro miembro **DIVIDIENDO** a todo el miembro
- Cuando un término está **DIVIDIENDO** en un miembro, pasa al otro miembro **MULTIPLICANDO** a todo el miembro

Los términos pueden pasar del miembro de la izquierda al de la derecha o viceversa.

EJERCICIO 09. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado (y una incógnita).

1. $2 - x = x - 8$ **2.** $2x - 1 = 5x + 8$ **3.** $3 + 3x - 1 = x + 2 + 2x$

4. $2(1 + 2x) = 10$ **5.** $2(3x - 2) = 2$ **6.** $-2(3x - 2) = -2$

7. $1 - \frac{x}{3} = \frac{5x}{3}$ **8.** $\frac{2x}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{4x}{2}$ **9.** $1 + \frac{1}{2}(4x - 6) = -2$

10. $x + \frac{1}{3}\left(x - 3 - \frac{1}{2}(4 - 3x)\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{5x}{2}\right)$

RESOLVIENDO PROBLEMAS

Vamos a resolver problemas de ecuaciones de primer grado, que son los típicos problemas que podríamos encontrar en nuestra vida cotidiana. La solución requiere el planteamiento y resolución de una ecuación con una incógnita. Los ejercicios están ordenados en dificultad creciente, empezando por las nociones básicas como representar algebraicamente el doble de un número, el triple, el consecutivo, etc.

Recordemos que. . .

- Si obtenemos una **igualdad imposible**, no existe solución. Por ejemplo, si obtenemos $1 = 0$. Esto ocurre, por ejemplo, en la ecuación $x = x + 1$, que sería como decir 'un número es igual a su consecutivo', lo cual es falso. Luego es lógico que la ecuación no tenga solución.
- Si obtenemos una **igualdad que siempre se cumple**, cualquier valor es solución, es decir, la solución es todos los reales. Por ejemplo, si obtenemos $0 = 0$. Esto ocurre, por ejemplo, en la ecuación $x = x$, que sería como decir 'un número es igual a sí mismo', lo cual es siempre cierto.

EJERCICIO 10. Resolviendo problemas (mediante ecuaciones de primer grado).

Problema 1. Escribir algebraicamente las siguientes expresiones:

1. El doble de un número *x*.
2. El triple de un número *x*.
3. El doble de un número *x* más *5*.
4. El cuadrado del triple de un número *x*.
5. Las tres cuartas partes de un número *x*.

Problema 2. En cada caso, hallar el número que cumple:

1. Su doble más *5* es *35*.
2. Al sumarle su consecutivo obtenemos *51*.
3. Al sumar su doble, su mitad y *15* se obtiene *99*.
4. Su cuarta parte es *15*.

Problema 3. Marta tiene *15* años, que es la tercera parte de la edad de su madre. ¿Qué edad tiene la madre de Marta?

Problema 4 ¿Cuánto mide una cuerda si su tercera cuarta parte mide *200* metros?

Problema 5. Hallar tres números consecutivos cuya suma sea *219*.

Problema 6. Recorremos un camino de *1km* a una velocidad de *6km/h*. ¿Cuánto tardamos en llegar al destino?

Problema 7. Héctor guarda *25* euros en su hucha, que supone sumar una cuarta parte del dinero que ya había. ¿Cuánto dinero hay en la hucha?

Problema 8. El padre de Ana tiene *5* años menos que su madre y la mitad de la edad de la madre es *23*. ¿Qué edad tiene el padre de Ana?

Problema 9. Carmen tiene *16* años y sus dos hermanos pequeños tienen *2* y *3* años. ¿Cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Carmen sea la misma que la que tiene ella?

Problema 10. Dado un número, la suma de su mitad, su doble y su triple es *55*. ¿Qué número es?

INFORMACIÓN TOMADA DE:

BIBLIOGRAFÍA/EGRAFÍA.

Ekuatio. Clases de matemática online 2015 – 2021. 2. Moviendo términos entre miembros: Transposición de términos. URL: *https://ekuatio.com/lesson/transposicion-de-terminos/*

INFORMACIÓN INCLUIDA EN LA VERSIÓN 2020 TOMADA DE:

BIBLIOGRAFÍA/EGRAFÍA.

Matesfacil.com. 45 Problemas Resueltos de Ecuaciones de Primer Grado. Problemas con Ecuaciones de Primer Grado. URL: *https://www.matesfacil.com/ESO/Ecuaciones/resueltos-problemas-ecuaciones.html*

Matesfacil.com. Ecuaciones de Primer Grado. Ecuaciones de primer grado resueltas. URL: *https://www.matesfacil.com/ESO/Ecuaciones/resueltos-ecuaciones-ec.html*

Problemas y Ecuaciones. Ecuaciones de Primer Grado. URL:
https://www.problemasyecuaciones.com/Ecuaciones/primer-grado/ecuaciones-primer-grado-resueltas-fracciones-parentesis-solucion.html

Profesor en línea. Ecuaciones de primer grado o lineales. 2016.
https://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuaciones_primer_grado.html

EL RESTO DEL CONTENIDO TOMADO DE LA VERSIÓN AÑO 2018.

BIBLIOGRAFÍA/EGRAFÍA.

http://portales.educared.net
http://sipan.inictel.gob.pe
http://sipan.inictel.gob.pe
http://www.acienciasgalilei.com
http://www.acienciasgalilei.com
http://www.definicionabc.com
http://www.disfrutalasmatematicas.com
http://www.ditutor.com
http://www.estudiantes.info
http://www.mekate.com
http://www.vitutor.com